EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
JANVIER 1907.

Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions

par

Marie Smoluchowski.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1907.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
JANVIER 1907.

Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions

par

Marie Smoluchowski.

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1907.

Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie.
Classe des Sciences mathématiques et naturelles.

Séance du 7 Janvier 1907.

M. MARIE SMOLUCHOWSKI. **Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkiej, a zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych.** ***(Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux; en particulier des problèmes en deux dimensions).*** Mémoire présenté par M. L. Natanson m. t. le 7 Janvier 1907.

I. Conditions qui suffisent à la détermination du mouvement.

§ 1. D'après les recherches de Helmholtz, de Korteweg et de lord Rayleigh [1]), les équations qui définissent le mouvement lent des liquides visqueux au cas du régime permanent, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \nabla^2 u \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \nabla^2 v \qquad (1) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \nabla^2 w \end{aligned}$$

n'ont qu'une seule intégrale, satisfaisant aux conditions de la continuité et à la condition que les vitesses u, v, w prennent des va-

[1]) Helmholtz, Wissensch. Abh. I, p. 223, Korteweg, Phil. Mag. 16, p. 112 (1883), Rayleigh, Phil. Mag. 36, p. 354 (1893).

leurs données à la surface de l'espace envisagé. Donc, si l'on a trouvé une telle solution, on sait que c'est la seule possible. Mais des difficultés se présentent lorsqu'on essaye, en s'appuyant sur ce théorème de construire des mouvements qui correspondent aux problèmes fournis par l'expérience.

D'abord, il faut remarquer que les preuves du théorème en question reposent sur la supposition sous-entendue que l'espace S, à la surface duquel les valeurs des vitesses sont données, n'est pas infini. Car elles exigent qu'une intégrale de la forme $\int F ds$ devienne zéro par suite de ce que la grandeur F y est égale à zéro; or, ce raisonnement n'est pas applicable au cas d'une surface S infinie, où $\lim_{\infty} F = 0$. En effet, nous rencontrerons plus loin quelques mouvements (§ 9, § 11) qui satisfont tous à la condition $\lim_{\infty} u = \lim_{\infty} v = \lim_{\infty} w = 0$ (tandis que la seule solution qui soit consistante avec l'immobilité du liquide aux parois d'un vaisseau de grandeur finie est l'état du repos absolu). Donc le théorème en question n'est pas vrai dans ce cas.

§ 2. Remarquons d'ailleurs qu'on établit un régime permanent du mouvement, en pratique, en reliant un conduit donné avec deux réservoirs où l'on maintient des pressions hydrostatiques différentes. L'expérience nous montre qu'alors le mouvement est défini, pour un conduit donné, par la différence de la pression exercée sur la surface du liquide dans ces deux réservoirs et qu'il est indépendant de la forme et des dimensions de ceux-là, s'ils sont de grandeur suffisante.

La question s'impose donc, si ces conditions aux limites données par l'expérience définissent aussi le problème théorique. Nous nous demanderons: dans quel cas suffira-t-il, pour déterminer le mouvement théorique, d'indiquer les valeurs limites de la pression, au lieu des trois composantes de vitesse?

Il est évident que la connaissance de la pression n'est pas suffisante, en général; mais si S est fini, il suffit de connaître les trois tensions p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}, exercées sur la surface S, ce qui se vérifie aisément à l'aide de l'équation (2) qui va suivre.

§ 3. Dans le cas d'un espace infini, au contraire, on prouve une proposition qui explique les questions soulevées ci-haut: Une distribution donnée des tensions p_{xn}, p_{yn}, p_{zn} (de grandeur finie), exercées

dans l'infini, ne peut produire pour des parois données, qu'un seul mouvement „fini".

Les mouvements seront appelés „finis" dont les vitesses sont finies partout et, en outre, dont le flux total traversant la surface S — évalué d'après les valeurs absolues des vitesses — reste fini, lorsque S s'étend à l'infini dans toutes les directions.

C'est-à-dire:

$$\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS = G\,.$$

Un cas spécial du mouvement fini, qui corresponde aux exemples réalisables en pratique, est le mouvement qu'on pourrait appeler „diaphragmatique", c'est-à-dire, dont les lignes de flux peuvent s'étendre jusqu'à l'infini, mais de telle sorte qu'aucune ne reste dans une distance infinie dans toute son étendue. Car dans ce cas chaque tube de flux peut être coupé, dans l'endroit où il se trouve dans une distance finie, de telle manière que la somme des coupes transversales Σq soit finie. Par conséquent, le flux qui les traverse $\Sigma (v)\, q = F$ sera fini, et par suite de l'invariabilité du produit $v\,q$ le long d'un tube de flux: $\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS \leqq 2\,F$. S'il n'y a pas de lignes de flux fermées, le signe d'égalité sera valable.

§ 4. D'abord il est facile de démontrer qu'il ne peut naître de mouvement fini, si les tensions à l'infini sont zéro. Cela résulte de l'équation qui exprime l'égalité du travail exercé par les tensions sur la surface S et de l'énergie dissipée par suite de la viscosité:

$$\int\int [p_{xn}\, u + p_{yn}\, v + p_{zn}\, w]\, dS = \mu \int\int\int \Phi\, dx\, dy\, dz. \qquad (2)$$

Cette équation, où Φ désigne la fonction dissipatrice [1]):

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

s'obtient par la substitution des grandeurs:

$$p_{xn} = p_{xx}\, l + p_{xy}\, m + p_{xz}\, n = p\, l - \\ - \mu\left[2\, l\,\frac{\partial u}{\partial x} + m\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + n\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \qquad (3)$$

et par intégration partielle, en ayant égard aux équations (1).

[1]) Voir p. ex. Lamb Hydrodynamics p. 541 (1906).

L'intégrale double s'étend à la surface extérieure de S, aux parois immobiles, et en général à toutes les surfaces, où u, v, w, ou leurs dérivées sont discontinues. Mais des surfaces de discontinuité ne peuvent exister, pour des simples raisons de mécanique, au sein du liquide; ce n'est que sur certaines lignes ou dans certains points des parois, p. ex. sur des arêtes pointues, que de telles discontinuités sont admissibles. Dans ce cas doit être satisfaite la condition que la valeur du travail produit par les pressions sur une surface qui enveloppe ces endroits de discontinuité, se réduise à zéro, lorsque cette surface se rétrécit à zéro, puisque la paroi immobile ne peut pas produire de travail. Nous ne considérons que des telles solutions des équations (1) qui satisfont à ces conditions de continuité, car elles seules peuvent avoir une signification physique.

La partie de l'intégrale double de l'équation (2) qui se rapporte aux parois immobiles, ne contribue en rien à la valeur du travail, par suite de l'adhésion complète du liquide aux parois (c'est-à-dire de $u = v = w = 0$). Il n'y reste que ce qui provient des parties de la surface S située au sein du liquide. La valeur absolue de cette intégrale sera moindre, évidemment, que le produit de la grandeur G (définie dans § 3) par les valeurs maxima des tensions p_{xn}..... qui agissent en S. Mais celles-ci se réduisent à zéro, lorsque nous étendons S à l'infini, ce qui fait disparaître l'intégrale double. Par conséquent, Φ sera zéro, ce qui exige qu'on ait partout $u = v = w = 0$.

Les mouvements lents (1) obéissent à la loi de superposition, par conséquent on peut suivre dans le raisonnement une voie bien connue: s'il y avait deux différents mouvements finis u, v, w, u', v', w', compatibles avec la même distribution des tensions p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}, la différence $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, représenterait un mouvement produit par des tensions zéro; mais nous venons de démontrer que dans ce cas cette différence ne peut être que zéro. Donc notre proposition, concernant la détermination du mouvement à l'aide des trois tensions agissant à l'infini, est démontrée.

§ 5. Considérons encore l'état du mouvement à l'infini. On prouve aisément que le vaisseau dans lequel le mouvement a lieu, ne peut pas avoir une section d'aire finie dans l'infini, si un mouvement fini y est produit par des pressions finies agissant à l'infini.

Construisons d'abord une sphère à rayon R autour de l'origine des coordonnées, afin de préciser ce que nous appelons „section";

ce sera cette partie de sa surface qui y est découpée par l'intersection avec les parois du vaisseau. Or, imaginons que cette section $\lim_{\infty} S$ soit finie. Dans ce cas il faut distinguer: ou les vitesses à l'infini sont infiniment petites, et, par conséquent, le travail accompli par les tensions est nul, ce qui entraîne, d'après (2), que Φ serait zéro partout, donc $u = v = w = 0$; ou ces vitesses, et, par conséquent, aussi la valeur du travail, y seraient finies; mais ceci serait en contradiction avec ce que Φ par suite des valeurs finies des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. ne serait zéro nulle part, donc $\int\int\int \Phi\, dv$ serait infini; d'où résulte la nécessité d'une section $\lim_{\infty} S$ infinie.

Par conséquent, il faut, afin que le mouvement soit „fini", que les vitesses soient infiniment petites à l'infini, comme $\frac{1}{R^2}$ dans le cas de trois dimensions, comme $\frac{1}{R}$ dans le cas de deux dimensions (avec exception possible de certains points singuliers). De même les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x} \ldots y$ seront nulles, en général, ce qui résulte aussi de ce que $\int\int\int \Phi\, dv$ doit être fini. D'où l'on conclura d'après (3) que:

$$\lim_{\infty} p_{xy} = \lim_{\infty} p_{xz} = \lim_{\infty} p_{yz} = 0; \quad \lim_{\infty} p_{xx} = \lim_{\infty} p_{yy} = \lim_{\infty} p_{zz} = 0.$$

Donc, en général, il suffit, pour la détermination complète des mouvements finis, qui s'étendent à l'infini — problème correspondant aux phénomènes de pratique — de fixer la distribution d'une grandeur seulement: de la pression p qui subsiste à l'infini.

Cela explique les questions soulevées dans le § 2.

Mouvement en deux dimensions.

§ 6. Les mouvements en deux dimensions des liquides parfaits ont été examinés par un nombre de mathématiciens; mais on s'est occupé très peu au contraire, de pareils mouvements dans le cas de liquides visqueux, quoiqu'ils soient plus intéressants au point de vue physique. La transpiration des liquides entre des plateaux parallèles, le mouvement rotatoire des liquides entre des cylindres à axe commun et certains mouvements à l'intérieur d'un cercle,

étudiés par Rayleigh[1]) à l'aide de la méthode des „sources et sinks" sont à ce qu'il paraît les seuls exemples d'un régime permanent connus. Il me semble, par conséquent, que les exemples des pareils mouvements exposés plus loin ne sont pas dénués d'un certain intérêt, surtout puisqu'ils peuvent être considérés comme les types les plus simples d'un mouvement s'étendant à l'infini.

D'abord nous établirons une certaine forme de la solution générale des équations (1) dans le cas mentionné. Celles-ci peuvent s'écrire par suite de l'incompressibilité du liquide:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{4}$$

où ζ, qui désigne la double vitesse de rotation $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, doit satisfaire à l'équation:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0\,. \tag{5}$$

Les lignes de pression égale et de tourbillonnement égal forment donc un système orthogonal:

$$\zeta + i\,\frac{p}{\mu} = f\,(x + i\,y).$$

Avec un p, tiré de cette relation pour un f donné, on pourrait intégrer les équations (1) en se servant des méthodes analogues à celles de la théorie du potentiel. Mais la solution se présente sous une forme beaucoup plus commode, lorsqu'on introduit la fonction de flux ψ, à l'aide des relations:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

et les variables indépendantes: $\alpha = x + i\,y$, $\beta = x - i\,y$.

Il en résulte:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right); \ \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha\,\partial \beta}. \tag{7}$$

La fonction ψ doit satisfaire à l'équation qui se déduit de (5):

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2\,\partial \beta^2} = 0 \tag{8}$$

[1]) Phil. Mag. 36, p. 354 (1893).

dont la solution générale est:

$$\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta). \tag{9}$$

Mais comme $\zeta = 4[f_1'(\beta) + f_2'(\alpha)]$ doit être réel, ces solutions appartiendront à une des deux classes (f désignant une fonction réelle):

$$\text{A)}\ \psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) \qquad \text{B)}\ \psi = \frac{1}{i}\Big[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)\Big] \tag{10}$$

$$\zeta = 4[f'(\alpha) + f'(\beta)] \qquad \zeta = 4\frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{i}$$

$$p = 4\mu\frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i} \qquad p = 4\mu[f'(\alpha) + f'(\beta)]$$

ou elles résulteront de la superposition de deux fonctions semblables et, en outre, d'un mouvement potentiel ordinaire correspondant aux termes f_3, f_4:

$$\text{C)}\ \psi = g(\alpha) + g(\beta) \quad \text{ou} \quad \text{D)}\ \psi = \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i}. \tag{11}$$

Comme paroi du vaisseau nous pourrons regarder les surfaces, où $u = v = 0$, dont l'équation peut être mise sous la forme

$$u^2 + v^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0. \tag{12}$$

Mais nous ne savons pas trouver la solution qui corresponde à une certaine forme donnée des parois; et il n'est même pas certain, si de telles solutions existent toujours pour des parois de forme arbitraire. Nous savons seulement qu'en général, les fonctions f, g, n'ont pas de points singuliers dans l'espace rempli par le liquide, si le mouvement est fini; ceux-ci sont situés dans l'espace occupé par les parois ou au delà des parois.

§ 7. Nous étudierons en détail le cas le plus simple: celui d'une paroi plane: $y = 0$. Adoptons d'abord la forme (10 B) avec le mouvement potentiel correspondant (11 D), d'où résultent les expressions suivantes:

$$u = \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) - f(\alpha) - f(\beta) - g'(\alpha) - g'(\beta)$$

$$v = \frac{1}{i}\Big[\alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) + g'(\alpha) - g'(\beta)\Big]. \tag{13}$$

En substituant $u = v = 0$ pour les valeurs $\alpha = \beta$ (c'est-à-dire $y = 0$) on parvient à la relation:

$$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha);$$

ces équations (13) deviennent

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right] \\ v &= \frac{1}{i}\left[2\,(f(\beta) - f(\alpha)) + (\alpha - \beta)(f'(\alpha) + f'(\beta))\right]. \end{aligned}$$

Donc on obtiendra un mouvement compatible avec la condition du repos à la paroi $y = 0$. en y substituant une fonction quelconque monodrome, mais ces mouvements qui n'appartiennent pas, en général, à la classe des mouvements finis, sont peu intéressants.

Adoptons la forme:

$$(15) \quad -f(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2 - c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha + c)(\alpha - c)} = \frac{1}{4}\sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

où r_1, r_2, θ_1, θ_2, désignent les rayons entre les points $\pm\, c$ et le point α, et les angles enfermés avec l'axe X, tandis que r, θ désigneront dans ce qui suit, les valeurs analogues par rapport au point 0.

Cette fonction n'est pas monodrome. mais en la substituant dans (14) [1]) on remarque que les vitesses:

$$(16) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\ v &= \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{c^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{aligned}$$

s'évanouissent pour $\theta_1 = \theta = \theta_2 = 0$ et pour $\theta_1 = \theta = \theta_2 = \pi$, c'est-à-dire pour les parties de l'axe des X situées entre $x = +1$. $x = \infty$

[1]) En se servant de la transformation:

$$\sqrt{\alpha^2 - c^2} - \sqrt{\beta^2 - c^2} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} =$$

$$= (\alpha + \beta)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}}\right] + c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right].$$

et entre $x = -1$ et $x = -\infty$. Par conséquent, on peut adopter ces parties comme des parois infranchissables, ce qui rend la fonction f monodrome.

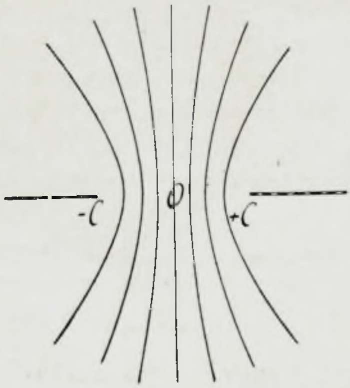


Fig. 1.

Les équations (10) nous donnent les valeurs du tourbillonnement:

$$\zeta = \frac{1}{i} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} \right\} = \frac{2\,r}{\sqrt{r_1\, r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (17)$$

et de la pression (comme fonction adjointe):

$$p = -\mu \frac{2\,r}{\sqrt{r_1\, r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right). \quad (18)$$

Dans des distances infinies on aura $\lim\limits_{\infty} \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 0$ pour des y positifs, $\lim\limits_{\infty} \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = \pi$ pour des y négatifs, et, par conséquent, $\lim\limits_{\infty} \zeta = 0$; $\lim\limits_{+\infty} p = -2\,\mu$ ou $\lim\limits_{-\infty} p = +2\,\mu$ pour les parties correspondantes de l'espace.

La différence de pression des deux côtés de la paroi, qui produit le mouvement, est 4 μ unités; pour des valeurs différentes il ne faudrait qu'augmenter toutes les vitesses dans la même proportion.

La vitesse entre les points $\pm\, c$ est $v = \sqrt{c^2 - x^2}$, et la quantité totale du liquide qui passe par cette ouverture:

$$(19) \qquad F = 2\int_0^c \sqrt{c^2 - x^2}\, dx = \frac{c^2 \pi}{2}$$

ou en fonction de la pression active $\triangle p$: $F = \frac{c^2 \pi}{8 \mu} \triangle p$.

C'est là un mouvement fini et c'est le seul qui corresponde à une telle différence de pression des deux côtés. Les lignes de flux qui représentent cet écoulement sont tracées pour des valeurs équidistantes de ψ dans la fig. (1). On obtient cette fonction ψ des équations (10, 11) en y introduisant les valeurs f, g:

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2}\, \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + c^2 \mathrm{arctg} \frac{r \sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\, \sin \frac{\theta_1 + \theta}{2}}{r \cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\, \cos \frac{\theta_1 + \theta}{2}}$$

§ 8. Il faut encore compléter cette analyse en examinant l'état du mouvement à l'infini et dans le voisinage immédiat des points $\pm c$. Pour une distance r très grande on a:

$$(20) \qquad \lim \left[\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right] = \lim \left| -\frac{c^2}{2} \frac{\frac{\theta_1 - \theta}{c} - \frac{\theta - \theta_2}{c}}{c} \right| =$$

$$= -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2}\,.$$

Comme ceci est une quantité très petite, on tire de (16):

$$(21) \qquad \begin{aligned} \lim\ u &= \frac{c^2 \sin^2\theta \cos\theta}{r} = \frac{c^2 x y^2}{r^4} \\ \lim\ v &= \frac{c^2 \sin^3\theta}{r} = \frac{c^2 y^3}{r^4}\,. \end{aligned}$$

Dans une distance considérable de l'ouverture le liquide est animé d'une vitesse radiale:

$$V = \frac{c^2}{r} \sin^2\theta\,.$$

Ces équations (21) peuvent être considérées comme la définition d'un écoulement par une ouverture très petite (de largeur $2c$) percée dans la paroi $y = 0$, elles coïncident avec la solution obtenue par lord Rayleigh, pour l'écoulement d'une source, située dans la

périphérie d'un cercle (équation 22′ loc. cit.), dans le voisinage immédiat de cette source.

La même solution s'obtient directement de (14) en y mettant: $f(\alpha) = \frac{c^2}{8\alpha}$, mais cette méthode n'indique pas le mouvement du liquide au point singulier $r = 0$. On déduit:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{c^2}{4}(2\theta - \sin 2\theta) \\ \zeta &= -c^2 \frac{\sin 2\theta}{r^2} \\ p &= -c^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} \end{aligned} \tag{22}$$

qui résultent aussi des équations (17, 18) à l'aide du développement:

$$\lim \log \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 (\log r)}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{1 - 2\cos^2\theta}{r^2} . \tag{23}$$

Pour une distribution donnée des sources et des déversoirs sur la paroi $y = 0$ le mouvement résultant, compatible avec la condition du repos sur le reste de cette paroi, s'obtiendrait par sommation (ou intégration) d'expressions (21), multipliées par des constantes.

§ 9. Afin d'examiner l'état du mouvement dans le voisinage immédiat des points $\pm c$, développons la fonction (16) en nous servant des relations:

$$r \sin\theta = r_1 \sin\theta_1; \quad r\cos\theta = c + r_1 \cos\theta_1,$$

ce qui donne, en négligeant les termes d'ordre supérieur:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2c}\sqrt{r_1} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} \\ v &= \sqrt{2c}\sqrt{r_1} \sin^3 \frac{\theta_1}{2} . \end{aligned} \tag{24}$$

On voit que les vitesses aux arêtes pointues sont égales à zéro et non infinies, comme l'on pouvait supposer à première vue d'après (16); c'est ce qui arriverait dans un liquide parfait. C'est là un résultat important, contraire à la théorie de Helmholtz concernant la formation des jets d'efflux des liquides [1]).

[1]) Helmholtz, Wissensch. Abh. I, p. 116; Smoluchowski, Bull. Crac. 1904. p. 371.

La même équation (24) résulte des formules générales (14) par substitution de: $f(\alpha) = -\frac{1}{4}\sqrt{2c\alpha}$. Elle représente le passage d'un liquide infini autour d'une arête pointue fig. (2); les lignes de flux.

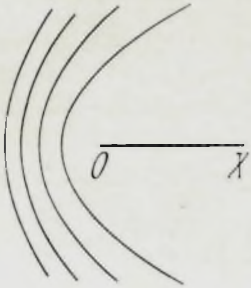


Fig. 2.

qui résultent de (10, 11) sont des paraboles, confocales avec le point $+c$:

$$\psi = -\frac{2}{3}\sqrt{2c}\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right]^3 \cdot \tag{25}$$

Les mêmes équations fournissent les valeurs:

$$\zeta = -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}; \quad p = -\mu\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}. \tag{26}$$

Ces fonctions sont indéfinies dans le point c, elles disparaissent à l'infini.

§ 10. Les exemples des §§ 7, 8, 9 nous donnent l'occasion de montrer qu'il y a aussi d'autres mouvements compatibles avec les mêmes données aux limites, c'est-à-dire avec les mêmes parois et la même distribution de la pression à l'infini, mais qu'il n'y a de mouvement fini que le mouvement (16).

Adoptons p. ex. la forme (10 A) avec superposition d'un mouvement correspondant (11 C) et procédons de la même manière qu'au § 7. Nous trouvons:

$$\begin{aligned} u &= i\,(2\,[f(\alpha) - f(\beta)] + (\alpha - \beta)\,[f'(\alpha) + f'(\beta)] \\ v &= (\beta - \alpha)\,[f'(\alpha) - f'(\beta)] \end{aligned} \tag{27}$$

ce qui remplit les conditions $u = v = 0$ à la paroi $y = 0$ pour des fonctions monodromes.

La substitution de $f = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - c^2}$ donne:

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \qquad (28)$$

$$v = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$p = 2\mu \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right); \quad \zeta = 2\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2} \sin\theta \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}.$$

C'est un mouvement qui satisfait à la condition $\lim_{\infty} p = 0$, donc on pourrait le superposer à (16) sans changement de la pression à l'infini, mais il appartient à la classe des mouvements infinis, puisque $\lim u = -2y$. Il correspond au passage du liquide le long d'une paroi percée d'une ouverture (fig. 3).

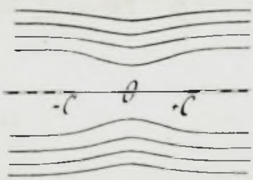


Fig. 3.

§ 11. Si nous examinons l'état du mouvement dans le voisinage du point $a = +c$, comme dans § 9, nous obtenons:

$$u = -\sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \quad v = -\sqrt{r}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (29)$$

$$p = -\frac{\mu}{\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2} \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\psi = 2\sqrt{r^3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

c'est ce qu'on peut déduire directement de (27) par la substitution $f(a) = \frac{1}{4}\sqrt{a}$. Cela représente le passage tangentiel du liquide le long d'une arête pointue; fig. (4).

En superposant cette solution à (24) après les avoir multipliées par des coefficients constants, on obtient des équations qui repré-

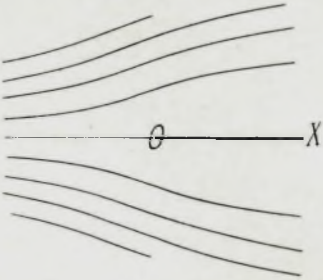


Fig. 4.

sentent le passage auprès d'une arête pointue avec des composantes données: normale et tangentielle. Ainsi la fig. (5) représente le mouvement défini par

$$\psi = 2\sqrt{r^3}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\left[\tfrac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{30}$$

dont les lignes de flux pour des x négatifs croissants s'approchent graduellement d'une inclinaison de $\theta = 2\ arctg\,(-3) = 217^{\circ}$.

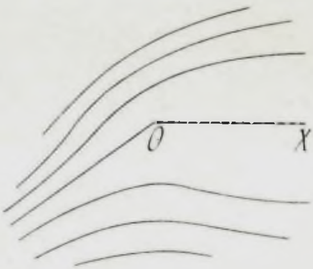


Fig. 5.

§ 12. L'état du mouvement à des distances grandes résulte de l'emploi des mêmes développements qu'au § 8. Si nous omettons les termes: $u = -2\,y$; $v = 0$; définissant un mouvement potentiel, qui ne nous intéresse pas, nous arrivons aux équations:

$$u = \frac{c^2}{2\,r} \sin 2\,\theta \cos \theta \qquad v = \frac{c^2}{2\,r} \sin 2\,\theta \sin \theta \tag{31}$$

$$p = \frac{c^2 \mu}{r^2} \sin 2\,\theta \qquad \zeta = -\frac{c^2}{r^2} \cos 2\,\theta$$

qui s'obtiennent aussi de (27) par la substitution $f(\alpha) = \frac{c^2}{8\,\alpha}$.

Elles représentent un mouvement dans l'étendue d'un demi-plan, causé par l'existence d'un courant tangentiel élémentaire dans O. D'autre part, ce mouvement peut être regardé comme efflux d'une source $\frac{c^2}{2}$ au point O dans l'espace entre les parois perpendiculaires X, Y.

En superposant [1]) cette solution à (21) on obtient l'efflux d'une source dans l'espace entre des parois enfermant l'angle $\alpha = arctg\ a$, où $\alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$u = \frac{\sin\,\theta \cos\,\theta}{r} \left[\cos\,\theta - a \sin\,\theta\right] \tag{32}$$

$$v = \frac{\sin^2\,\theta}{r} \left[\cos\,\theta - a \sin\,\theta\right].$$

La vitesse résultante radiale est

$$V = \frac{\sin\theta \sin(\alpha - \theta)}{r \sin\alpha}.$$

Je remarquerai encore que le mouvement (31), de même que (21), est contenu, comme forme limite, parmi les mouvements examinés par lord Rayleigh; il résulte de l'équation (33') loc. cit. lorsque le rayon du cercle qui contient le liquide s'étend à l'infini.

D'autre part, il est intéressant de comparer les mouvements (16) (24) avec les mouvements correspondants à symétrie axiale qui ont été étudiés par M. Sampson [2]). Cet auteur a démontré qu'auprès

[1]) La condition de la continuité des vitesses donne naissance à la règle suivante: On peut superposer toujours des mouvements correspondant à la même forme des parois. Aussi des mouvements à différentes formes des parois peuvent être superposés, mais seulement dans le cas où l'espace occupé par le liquide dans son mouvement résultant ne contient pas des endroits où se trouvaient les parois d'un des mouvements composants.

[2]) Phil. Trans. Vol. 182, p. 449.

d'une paroi plane infinie avec ouverture circulaire un mouvement peut naître dont les lignes de flux (dans la coupe axiale) sont des hyperboles coaxiales. La fonction de flux est:

$$\psi = \frac{V c^2 q^3}{3} \tag{33}$$

où c désigne le rayon de l'ouverture, V la vitesse dans son milieu, q la coordonnée hyperbolique du point x, y, c'est-à-dire la racine hyperbolique de l'équation en λ:

$$\frac{x^2}{1-\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = c^2 \ . \tag{34}$$

Dans le voisinage immédiat des bords de l'ouverture, c'est-à-dire à des distances petites par rapport au diamètre de celle-ci, les hyperboles dégénèrent en paraboles et le mouvement (33) coïncide avec le mouvement étudié au § 9. Pour des grandes distances de l'ouverture, au contraire, l'équation de M. Sampson donne des formules qui représentent un écoulement à trois dimensions d'une source dans une paroi plane; le résultat est analogue, en quelque sorte, à celui du § 8, puisque la vitesse du liquide y est aussi radiale et proportionnelle à $\sin^2 \theta$, mais la différence consiste dans ce qu'elle change en raison inverse du carré de la distance r; la distribution de la pression est déterminée par la formule:

$$p = \frac{c\mu}{r^3} \left(\frac{3\, y^2}{r^2} - 1 \right) \ . \tag{35}$$

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

Table des articles du Nº 1.

Janvier 1907.